# الثانية إقتصاد وتدبير

# تصحيح الامتحان الوطني 2017

**التمرين الأول : ( 4,5 ن )**

| | |
|---|---|
| نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0=6$ و $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{2}{5}$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ | |
| **1.** أ- أحسب $u_1$ و $u_2$ | 0,5 |
| ب- بين بالترجع أن لكل $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_n>\frac{1}{2}$ | 0,75 |
| ج- تحقق أن لكل $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_{n+1}-u_n=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}-u_n\right)$ | 0,5 |
| د- استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية وأنها متقاربة | 0,5 |
| **2.** نضع لكل $n$ من $\mathbb{N}$ : $v_n=u_n-\frac{1}{2}$ | |
| أ- بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية محددا أساسها | 0,25 |
| ب- أحسب حدها الأول $v_0$ | 0,25 |
| ج- أحسب $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج أن $u_n=\frac{1}{2}\left(11\left(\frac{1}{5}\right)^n+1\right)$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ | 0,75 |
| د- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ | 0,25 |
| **3.** نضع $S_n=u_0+u_1+u_2+........+u_{n-1}$ | |
| بين أن $S_n=\frac{55}{8}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)+\frac{n}{2}$ | 0,75 |

**التمرين الثاني : ( 4 ن )**

| | |
|---|---|
| يحتوي كيس على تسع كرات غير قابلة للتمييز باللمس تحمل على التوالي الأعداد : $2;2;2;1;1;1;1;0;0$ نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الكيس . | |
| **1.** بين أن عدد حالات السحب الممكنة هو 36 | 0,75 |
| **2.** ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يساوي مجموع العددين اللذين تحملهما الكرتان المسحوبتان | |
| أ- بين أن $p(X=0)=\frac{12}{36}$ | 0,75 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $p(X=x_i)$ | | | $\frac{12}{36}$ | | |

2 ب- انقل الجدول جانبه على ورقة التحرير ثم أتمم ملأه معللا جوابك .

0,5 ج- أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي $X$

## التمرين الثالث : ( 8,5 ن )

### الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية $g$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=2-\frac{2}{x}+\ln x$

1,5 **1.** أحسب $g'(x)$ و استنتج أن $g$ تزايدية على $]0,+\infty[$

1,25 **2.** أ- أحسب $g(1)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة $g$ ( حساب النهايتين عند 0 و $+\infty$ غير مطلوب )

1 ب- استنتج إشارة الدالة $g$ على كل من المجالين $]0,1]$ و $[1,+\infty[$

### الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x-1+(x-2)\ln x$

0,75 **1.** بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$

0,75 **2.** بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0,75 **3.** أ- بين أن لكل $x$ من $]0,+\infty[$ : $f'(x)=g(x)$

1,5 ب- أحسب $f(1)$ و $f(2)$ و $f\left(\frac{1}{e}\right)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة $f$ على $]0,+\infty[$

1 ج- باستعمال جدول التغيرات حدد صورة المجال $\left[\frac{1}{e},2\right]$ بالدالة $f$

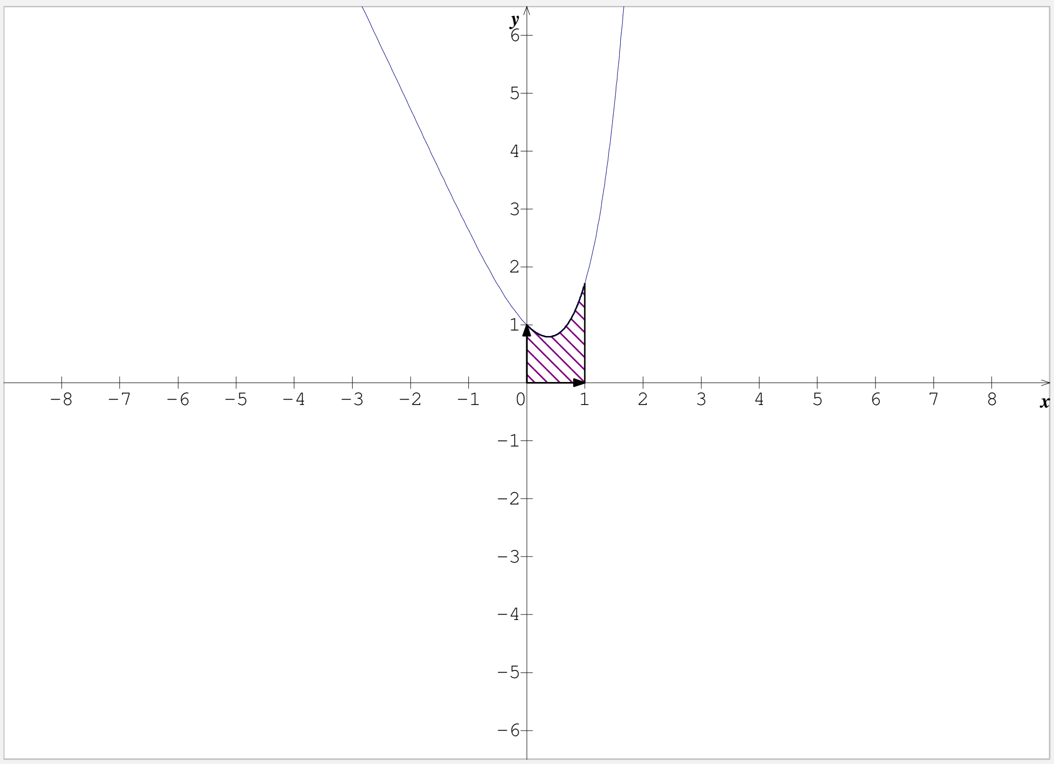
## التمرين الرابع : ( 3 ن )

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر الدالة العددية $h$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $h(x)=xe^x-2x+1$

1,5 .1 باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^1 xe^x\,dx=1$

| | |
|---|---|
| 2. في الشكل أسفله $(C_h)$ هو التمثيل المبياني للدالة $h$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ <br><br> أحسب مساحة الحيز المخدش | 1,5 |



## تصحيح التمرين الأول

1. أ- $u_1=\frac{1}{5}u_0+\frac{2}{5}=\frac{1}{5}(6)+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}+\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$

$$u_2=\frac{1}{5}u_1+\frac{2}{5}=\frac{1}{5}\left(\frac{8}{5}\right)+\frac{2}{5}=\frac{8}{25}+\frac{10}{25}=\frac{18}{25}$$

ب-

1. من أجل $n=0$
   لدينا : $u_0=6$
   إذن : $u_0>\frac{1}{2}$
2. ليكن $n\in\mathbb{N}$
   - نفترض أن : $u_n>\frac{1}{2}$
   - و نبين أن : $u_{n+1}>\frac{1}{2}$ ؟

   لدينا حسب الافتراض $u_n>\frac{1}{2}$
   إذن $\frac{1}{5}u_n>\frac{1}{10}$
   إذن $\frac{1}{5}u_n+\frac{2}{5}>\frac{1}{10}+\frac{2}{5}$
   إذن : $u_{n+1}>\frac{1}{2}$
3. نستنتج أن : **لكل** $n$ **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_n>\frac{1}{2}$

ج- ليكن $n\in\mathbb{N}$ :

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{5}u_n+\frac{2}{5}-u_n=\left(\frac{1}{5}-1\right)u_n+\frac{2}{5}=\frac{-4}{5}u_n+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}-u_n\right)$

إذن : لكل $n$ من $\mathbb{N}$ **:** $u_{n+1}-u_n=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}-u_n\right)$

د-

4. ليكن $n\in\mathbb{N}$ :
   لدينا : $u_n>\frac{1}{2}$

إذن : $\frac{1}{2}-u_n<0$

إذن : $\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}-u_n\right)<0$

إذن : لكل $n$ من $\mathbb{N}$ $u_{n+1}-u_n<0$

و منه $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية

5. بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية و مصغورة ( بالعدد $\frac{1}{2}$ ) فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة

2. أ- ليكن $n\in\mathbb{N}$ :

لدينا : $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{5}u_n+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1}{5}u_n-\frac{1}{10}=\frac{1}{5}\left(u_n-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}.v_n$

إذن : : لكل $n$ من $\mathbb{N}$ $v_{n+1}=\frac{1}{5}.v_n$

و منه المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{5}$

ب- $v_0=u_0-\frac{1}{2}=6-\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$

ج-

6. ليكن $n\in\mathbb{N}$ :

لدينا : $v_n=v_0.q^n$

إذن : لكل $n$ من $\mathbb{N}$ $v_n=\frac{11}{2}.\left(\frac{1}{5}\right)^n$

7. لدينا : $v_n=u_n-\frac{1}{2}$

إذن $u_n=v_n+\frac{1}{2}$

إذن : $u_n=\frac{11}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{1}{2}$

و منه $u_n=\frac{1}{2}\left(11\left(\frac{1}{5}\right)^n+1\right)$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

د- لدينا : $-1<\frac{1}{5}<1$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=0$

و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(11\left(\frac{1}{5}\right)^n+1\right)=\frac{1}{2}$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$

.3 لنحسب : $S_n=u_0+u_1+u_2+........+u_{n-1}$

لدينا : $u_n=v_n+\frac{1}{2}$

إذن $S_n=v_0+\frac{1}{2}+v_1+\frac{1}{2}+v_2+\frac{1}{2}+........+v_{n-1}+\frac{1}{2}$

إذن : $S_n=v_0+v_1+v_2+........+v_{n-1}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+......+\frac{1}{2}}_{((n-1)-0+1)fois}$

إذن $S_n=v_0.\dfrac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{(n-1)-0+1}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+......+\frac{1}{2}}_{((n-1)-0+1)fois}$

إذن : $S_n=\frac{11}{2}.\dfrac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{4}{5}}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+......+\frac{1}{2}}_{(n)fois}$

و منه : $S_n=\frac{55}{8}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)+\frac{n}{2}$

## تصحيح التمرين الثاني

1. التجربة " سحب كرتين في آن واحد من الكيس "
ليكن $\Omega$ كون إمكانيات التجربة

$$card\,\Omega = C_9^2 = \frac{9\times 8}{2\times 1} = 36$$ ( عدد حالات السحب الممكنة )

2. $X$ المتغير العشوائي الذي يساوي مجموع العددين اللذين تحملهما الكرتان المسحوبتان

أ-

$$X = 2 \;\rightarrow\; \begin{cases} \boxed{0}\boxed{2} \\ \text{أو} \\ \boxed{1}\boxed{1} \end{cases}$$

$$p(X = 2) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 + C_4^2}{36} = \frac{2\times 3 + 6}{36} = \frac{12}{36}$$

ب-

8. $$X = 0 \;\rightarrow\; \boxed{0}\boxed{0}$$

$$p(X = 0) = \frac{C_2^2}{36} = \frac{1}{36}$$

9. $$X = 1 \;\rightarrow\; \boxed{0}\boxed{1}$$

$$p(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_4^1}{36} = \frac{2\times 4}{36} = \frac{8}{36}$$

10. حسب نتيجة السؤال 2) أ- : $p(X = 2) = \dfrac{12}{36}$

11. $$X = 3 \;\rightarrow\; \boxed{1}\boxed{2}$$

$$p(X = 3) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{36} = \frac{4\times 3}{36} = \frac{12}{36}$$

12. $$X = 4 \;\rightarrow\; \boxed{2}\boxed{2}$$

$$p(X = 4) = \frac{C_3^2}{36} = \frac{3}{36}$$

قانون احتمال $X$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{8}{36}$ | $\frac{12}{36}$ | $\frac{12}{36}$ | $\frac{3}{36}$ |

ج- $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي $X$:

$$E(X)=\left(0\times\frac{1}{36}\right)+\left(1\times\frac{8}{36}\right)+\left(2\times\frac{12}{36}\right)+\left(3\times\frac{12}{36}\right)+\left(4\times\frac{3}{36}\right)=\frac{0+8+24+36+12}{36}=\frac{80}{36}=\frac{20}{9}$$

## تصحيح التمرين الثالث

**الجزء الأول :**

.1

**13.** ليكن $x\in\left]0,+\infty\right[$ :

لدينا : $g'(x)=\left(2-\frac{2}{x}+\ln x\right)'=0-2.\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}$

إذن $g'(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}$ لكل $x$ من $\left]0,+\infty\right[$

.14 لدينا $x>0$ إذن $\frac{2}{x^2}>0$ و $\frac{1}{x}>0$ إذن $\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}>0$

إذن $g'(x)>0$ لكل $x$ من $\left]0,+\infty\right[$

و منه الدالة $g$ تزايدية قطعا على $\left]0,+\infty\right[$

.2 أ-

.15 $g(1)=2-\frac{2}{1}+\ln 1=2-2+0=0$

.16 جدول تغيرات الدالة $g$ :

| $x$ | $0$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ |
| $g(x)$ | $\nearrow$ |

ب-

✓ على المجال $\left]0,1\right]$ : لدينا : $0<x\leq 1$ و الدالة $g$ تزايدية

إذن : $g(x)\leq g(1)$

و منه : $g(x)\leq 0$

✓ على المجال $\left[1,+\infty\right[$ : لدينا : $x\geq 1$ و الدالة $g$ تزايدية

إذن : $g(x)\geq g(1)$

و منه : $g(x)\geq 0$

**الجزء الثاني :**

.1 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x-1+(x-2)\ln x=+\infty$

لأن :
$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x-1=-1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x-2=-2\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty\end{cases}$$

.2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1+(x-2)\ln x=+\infty$

لأن :
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty\end{cases}$$

.3 أ- ليكن $x\in\left]0,+\infty\right[$ :

لدينا :

$$\begin{aligned}f'(x)&=1+(x-2)'\ln x+(x-2).\ln'(x)\\&=1+\ln x+\frac{x-2}{x}\\&=1+\ln x+1-\frac{2}{x}\\&=\ln x+2-\frac{2}{x}\\&=g(x)\end{aligned}$$

إذن : لكل $x$ من $\left]0,+\infty\right[$ : $f'(x)=g(x)$

ب-

✓ $f(1)=1-1+(1-2)\ln 1=0$

✓ $f(2)=2-1+(2-2)\ln 2=1$

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1+\left(\frac{1}{e}-2\right)\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1-\frac{1}{e}+2=1 \quad \checkmark$$

ج- $f\left(\left[\frac{1}{e},2\right]\right)=[0,1]$

( على المجال $\left[\frac{1}{e},2\right]$ : القيمة الدنوية للدالة $f$ هي $0$ و القيمة القصوية للدالة $f$ هي $1$ و $f$ متصلة على $\left[\frac{1}{e},2\right]$ )

## تصحيح التمرين الرابع

.1

$$\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=e^x \end{cases} \updownarrow \qquad \begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x\,dx &= \left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx \\
&= \left[xe^x\right]_0^1-\left[e^x\right]_0^1 \\
&= (e-0)-(e-1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 h(x)\,dx.(UA) \\
&= \int_0^1 \left(xe^x-2x+1\right)dx.(UA) \\
&= \left(\left(\int_0^1 xe^x\,dx\right)+\left(\int_0^1(-2x+1)\,dx\right)\right).(UA) \\
&= \left(1+\left[-x^2+x\right]_0^1\right).(UA) \\
&= 1.(UA)
\end{aligned}$$

つづく